5 Lineare Abbildungen

$\sum a_i v_i$ linear

$b + \boxed{\sum a_i x_i}$ linear.

5.1 Definition

Gegeben seien Vektorräume U, V, W über einem Körper K.

Definition: Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heisst *K-linear*, wenn gilt:

(a) $\forall v, v' \in V : f(v + v') = f(v) + f(v')$ und

(b) $\forall v \in V\ \forall \lambda \in K : f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v)$.

Wenn der Körper K aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, sagt man nur kurz *linear*.

Grundeigenschaften: Für jede lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gilt:

(a) $f(0_V) = 0_W$, und

(b) $\forall v \in V : f(-v) = -f(v)$.

Bew (a) $0_V + 0_V = 0_V \Rightarrow f(0_V) + f(0_V) \overset{\text{Def. (a)}}{=} f(0_V + 0_V) = f(0_V) = f(0_V) + 0_W$

$\Rightarrow f(0_V) = 0_W$.

(b) $f(-v) = f(-1_K \cdot v) \overset{\text{Def. (b)}}{=} -1_K \cdot f(v) = -f(v)$

oder: $f(v) + f(-v) \overset{\text{Def. (a)}}{=} f(v + (-v)) = f(0_V) \overset{(a)}{=} 0_W \Rightarrow f(-v) = -f(v)$.

qed

Beispiel: Die *Nullabbildung* $V \to W$, $v \mapsto 0_W$ ist linear. ✓

Beispiel: Die *identische Abbildung* $\mathrm{id}_V\colon V \to V$, $v \mapsto v$ ist linear.

Proposition: Für jede Basis B von V und jede Abbildung $f_0 \colon B \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $f \colon V \to W$ mit $\forall\, b \in B \colon f(b) = f_0(b)$, nämlich

$$v = \boxed{\sum_{b\in B}{}' x_b \cdot b \overset{(*)}{\mapsto} \sum_{b\in B}{}' x_b \cdot f_0(b).}$$

Bew.: Wenn $f: V \to W$ linear mit $\forall b \in B: f(b) = f_0(b)$, dann gilt für alle v:

$f(v) = f(\sum_b{}' x_b b) = \sum_b{}' x_b \cdot f(b) = \sum_b{}' x_b f_0(b)$.

Bel.: $(*)$ definiert eine lineare Abb.

$\lambda v = \sum_b{}' \lambda x_b b \mapsto \sum_b{}' (\lambda x_b) \cdot f_0(b) = f(\lambda v)$

$= \lambda \cdot \sum_b{}' x_b f_0(b) = \lambda f(v)$

Addition analog.

Beispiel: Sei A eine $m \times n$-Matrix über K. Dann ist *Linksmultiplikation* mit A eine lineare Abbildung der Räume von Spaltenvektoren

$$L_A \colon K^n \to K^m,\ v \mapsto Av,$$

Beweis: $A \cdot (v + v') = A \cdot v + A \cdot v'$

$A(\lambda v) = \lambda \cdot Av$. qed.

und *Rechtsmultiplikation* mit A eine lineare Abbildung der Räume von Zeilenvektoren

$$R_A \colon K^m \to K^n,\ v \mapsto vA.$$

Proposition: Für jede lineare Abbildung der Räume von Spaltenvektoren $f: K^n \to K^m$ existiert genau eine $m \times n$-Matrix A über K mit $L_A = f$. Die j-te Spalte von A ist genau das Bild des j-ten Standardbasisvektors e_j unter f.

Tipp: Die Matrix A klar von der linearen Abbildung L_A bzw. R_A unterscheiden!

Bew.: Für jedes $1 \le j \le n$ sei $\boxed{v_j := f(e_j)}$

Für jedes $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ gilt $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, also $f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j$.

$= (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = L_A(x)$

Mit $A := (v_1, \dots, v_n)$ gilt also $f = L_A$.

Sei umgekehrt $f = L_{A'}$.

Wegen $\underbrace{L_{A'}(e_j)}_{= f(e_j)} = A' e_j =$ j-te Spalte von A'. $\Big\} \Rightarrow A' = A$.

qed

5.2 Kern und Bild

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung.

Definition: Der *Kern von f* und das *Bild von f* sind die Teilmengen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}(f) &:= \{v \in V \mid f(v) = 0\} &\subset V,\\
\mathrm{Bild}(f) &:= \{f(v) \mid v \in V\} &\subset W.
\end{aligned}$$

Proposition: (a) Kern(f) ist ein Unterraum von V.

(b) f ist injektiv genau dann, wenn Kern$(f) = 0$ ist.

Bew (a) $f(0)=0 \Rightarrow 0 \in \mathrm{Ker}(f)$.

$v, v' \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(v) = f(v') = 0$

$\Rightarrow f(v+v') = f(v) + f(v') = 0+0 = 0$

$\Rightarrow v+v' \in \mathrm{Ker}(f)$.

$f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda v \in \mathrm{Ker}(f)$.

(b) f inj $\Rightarrow \forall v \in \mathrm{Ker}(f): f(v) = 0 = f(0)$

$\Rightarrow v = 0$.

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

$\mathrm{Ker}(f) = 0$. Seien $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$

$\Rightarrow f(v-v') = f(v) - f(v') = 0$

$\Rightarrow v - v' \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow v - v' = 0 \Rightarrow v = v'$.

$\Rightarrow f$ injektiv.

Proposition: (a) Bild(f) ist ein Unterraum von W.

(b) f ist surjektiv genau dann, wenn Bild$(f) = W$ ist.

Bew.: $0_W = f(0_V) \in \mathrm{Bild}(f)$

$\forall v, v' \in V$: $\underbrace{f(v+v')}_{\in \mathrm{Bild}(f)} = \underbrace{f(v)}_{} + \underbrace{f(v')}_{}$ $\Leftarrow$ bel. Elemente von Bild(f)

$\forall v \in V$ $\forall \lambda \in K$: $\underbrace{f(\lambda v)}_{\in \mathrm{Bild}(f)} = \lambda \cdot \underbrace{f(v)}_{\in \mathrm{Bild}(f)}$

qed.

$L_A(x) = b$

Beispiel: Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $Ax = b$ ist lösbar genau dann, wenn der Vektor b im Bild $\mathrm{Bild}(L_A)$ der linearen Abbildung L_A liegt. Ist es lösbar, so ist die Lösung eindeutig genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(L_A) = 0$ ist.

$f: V \to W$ gegeben.

Satz: Es gilt

$$\dim(V) \;=\; \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f).$$

Insbesondere ist $\dim \mathrm{Kern}(f) \leqslant \dim(V)$ und $\dim \mathrm{Bild}(f) \leqslant \dim(V)$.

Bew.: Sei B' eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$ und B eine Basis von V mit $B' \subset B$. Setze $B'' := B \setminus B'$.

Beh.: $f|_{B''}$ injektiv und $f(B'')$ Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Dann folgt $\dim(V) = |B| = |B'| + |B''| = |B'| + |f(B'')| = \dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f)$.

Wäre $b'', b''' \in B''$ mit $f(b'') = f(b''')$, wäre $f(b'' - b''') = 0 \Rightarrow b'' - b''' \in \mathrm{Ker}(f)$.

Also ist $b'' - b''' = \sum_{b' \in B'} x_{b'} \cdot b'$. B lin. unabh. $\Rightarrow b'' = b'''$.

Sei $f(v) \in \mathrm{Bild}(f)$ beliebig. Schreibe $v = \sum'_{b \in B} x_b b \Rightarrow f(v) = \sum'_{b \in B} x_b \cdot \underbrace{f(b)}_{= 0 \text{ falls } b \in B'} = \sum'_{b \in B''} x_b f(b)$.

Also ist $\langle f(B'') \rangle = \mathrm{Bild}(f)$.

Wäre $\sum'_{b \in B''} x_b f(b) = 0$, wäre $f\left(\sum'_{b \in B''} x_b b\right) = 0 \Rightarrow \sum'_{b \in B''} x_b b \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow \sum'_{b \in B''} x_b b = \sum'_{b \in B'} y_b b$ für gewisse y_b

B lin. unabh. $\Rightarrow$ alle $x_b = 0$. $\Rightarrow B''$ lin. unabh. ged.

Satz: Ist $\dim(V) = \dim(W) < \infty$, so gilt

$$f \text{ injektiv} \iff f \text{ surjektiv} \iff f \text{ bijektiv.}$$

Bew.: f inj $\iff \dim \mathrm{Ker}(f) = 0 \iff \dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V = \dim W \iff \mathrm{Bild}(f) = W$
$\iff f$ surjektiv.

qed

5.3 Komposition, Isomorphismen

Proposition: Für je zwei lineare Abbildungen $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ ist die Komposition $g \circ f\colon U \to W$ linear.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & V \arrow[d, "g"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Bew.: $g(f(u+u')) = g(f(u)+f(u')) = g(f(u)) + g(f(u'))$

$g(f(\lambda w)) = \ldots$

qed.

Proposition: Für jede $m \times n$-Matrix A und jede $n \times \ell$-Matrix B gilt $L_A \circ L_B = L_{AB}$.

Bew.: $L_A(L_B(v)) = A \cdot (Bv) = (AB)v = L_{AB}(v)$.   qed.

Definition: Eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$, zu welcher eine lineare Abbildung $g\colon W \to V$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$ und $f \circ g = \mathrm{id}_W$, heisst ein *Isomorphismus.*

$$V \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} W$$

Satz: Eine lineare Abbildung f ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie bijektiv ist. Die beidseitige *Inverse* g in der obigen Definition ist dann eindeutig bestimmt und gleich der Umkehrabbildung $f^{-1}\colon W \to V$.

Bew.: f Isom., g wie oben $\Rightarrow f$ bijektiv.

f bijektiv, Beh.: f^{-1} linear.

Seien $w, w' \in W$: $f^{-1}(w+w') = f^{-1}\big(\underbrace{f(f^{-1}(w)) + f(f^{-1}(w'))}_{=\,f(f^{-1}(w)+f^{-1}(w'))}\big)$

$= f^{-1}\big(f(f^{-1}(w) + f^{-1}(w'))\big) = f^{-1}(w) + f^{-1}(w')$.

Analog $f^{-1}(\lambda w) = f^{-1}(\lambda f(f^{-1}(w))) = f^{-1}(f(\lambda f^{-1}(w))) = \lambda f^{-1}(w)$. qed.

Beispiel: Die Abbildung $L_A\colon K^n \to K^m$ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn $m = n$ ist und A invertierbar ist. Ihre Umkehrabbildung ist dann $L_A^{-1} = L_{A^{-1}}$.

Bew.: L_A Isom $\Leftrightarrow \exists g\colon K^m \to K^n$ linear mit $g \circ L_A = id \wedge L_A \circ g = id$.

$\Leftrightarrow \exists B$: $\underbrace{L_B \circ L_A}_{=\,L_{BA}} = \underbrace{id}_{=\,L_I} \wedge \underbrace{L_A \circ L_B}_{=\,L_{AB}} = \underbrace{id}_{=\,L_I}$

$\Leftrightarrow \exists B$: $BA = I \wedge AB = I$. $\Rightarrow A$ invertierbar mit $L_A^{-1} = L_B$, $B = A^{-1}$. qed.

L_A isom. $\Rightarrow n = \dim K^n = m = \dim K^m$